

# ナイトツアーのグラフ理論的解析：ハミルトン問題とアルゴリズムの探求

## 第1章 序論：ナイトツアー問題の概要と歴史的背景

ナイトツアーは、チェス盤のマスをナイトという駒を使ってすべて一度ずつ訪問する経路を見つけ出すという、古くから知られる数学的パズルである<sup>1</sup>。この問題の核心は、将棋の桂馬に似た独特なL字型の動きをするナイトの特性にある<sup>2</sup>。その起源は古く、9世紀のアラビアの詩にまで遡ることができ、チェスをモチーフにしたパズルの中でも特に長い歴史を持っている<sup>3</sup>。18世紀には、数学者のレオンハルト・オイラーが8x8チェス盤における解を考案したことで、この問題は数学的な探求の対象として広く認識されるようになった<sup>5</sup>。

この問題は、終点が始点と異なる「開ナイトツアー（Open Knight's Tour）」と、終点が始点から一手で戻れる位置にある「閉ナイトツアー（Closed Knight's Tour）」の二種類に大別される<sup>7</sup>。オイラーは、グラフ理論の基礎を築いた人物としても知られており、彼がこの問題に取り組んだという事実は、ナイトツアーがグラフ理論という数学的枠組みと密接に結びついていることを象徴している<sup>4</sup>。本報告書では、このナイトツアー問題をグラフ理論の観点から厳密に定式化し、その存在条件、解法アルゴリズム、そして計算複雑性理論における位置づけについて詳細に解説する。

## 第2章 ナイトツアーのグラフ理論的定式化

ナイトツアー問題を数学的に解析するためには、チェス盤とその上のナイトの動きを、より抽象的なグラフ構造へと変換することが不可欠である。この変換によって、チェスという特定のゲームの制約から解放され、より汎用的な数学的ツールを適用することが可能になる。

## 2.1 ナイトグラフの定義と構造

ナイトツアー問題をグラフ理論の言葉で記述するために、まず「ナイトグラフ」を定義する<sup>8</sup>。

$m \times n$  のチェス盤について、各マスを図の\*\*頂点 (vertex) とし、ナイトが合法的に一手で移動できるような頂点のペアを図 (edge) \*\*で結んだ図を  $(m \times n)$ -ナイトグラフと呼ぶ<sup>8</sup>。

このナイトグラフが持つ最も重要な構造的特性の一つは、それが常に\*\*二部グラフ (bipartite graph) \*\*であるという点である<sup>8</sup>。これは、チェス盤が白と黒のマスで構成されていることに由来する。ナイトは常に、白マスから黒マスへ、または黒マスから白マスへと移動するため、同じ色のマスへは移動できない<sup>6</sup>。この事実を図の言葉に置き換えると、頂点集合を白マスの集合  $A$  と黒マスの集合  $B$  の二つの独立したグループに分割でき、図は必ず集合  $A$  の頂点と集合  $B$  の頂点を結ぶことになる。この構造は二部グラフの定義そのものであり、ナイトツアーの存在条件を証明する上で決定的な役割を果たす。

## 2.2 ナイトツアーとハミルトン問題の対応関係

グラフ理論における重要な概念に、ハミルトン路とハミルトン閉路がある。\*\*ハミルトン路 (Hamiltonian path) \*\*は、図のすべての頂点を一度ずつ通る経路を指し<sup>9</sup>、\*\*ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle) \*\*は、そのハミルトン路が始点に戻る閉じた経路を指す<sup>9</sup>。

この定義に基づけば、ナイトツアーはグラフ理論におけるハミルトン路問題の特殊なインスタンスであることが見なすことができる<sup>4</sup>。具体的には、ナイトツアーはナイトグラフのすべての頂点 (マス目) をちょうど一度ずつ通る経路であるため、開ナイトツアーは

ハミルトン路に、閉ナイトツアーはハミルトン閉路にそれぞれ対応する<sup>8</sup>。この対応関係が確立されることで、ナイトツアーの存在条件をグラフ理論の観点から厳密に解析することが可能となる。

### 第3章 ナイトツアーの存在条件に関する数学的定理

ナイトツアーの存在は、チェス盤のサイズによって決まる。特定のサイズの盤に閉ナイトツアーが存在するかどうかについては、S. Allen Schwenk によって厳密な必要十分条件が証明されている。

#### 3.1 閉ナイトツアーの存在条件：Schwenk の定理

Schwenk の定理は、 $m \times n$  チェス盤 ( $m \leq n$ ) に閉ナイトツアーが存在するための必要十分条件は、以下のいずれの条件も満たされないことであると述べている<sup>4</sup>。

- (I)  $m$  と  $n$  がともに奇数である。
- (II)  $m=1, 2$ , または  $4$  である。
- (III)  $m=3$  であり、かつ  $n=4, 6$ , または  $8$  である。

この定理の根底にあるのは、第2章で議論したナイトグラフの二部グラフとしての特性である。特に、条件(I)が成立する場合、閉ツアーが存在しないことはエレガントに証明できる。もし  $m$  と  $n$  がともに奇数であれば、マス目の総数  $m \times n$  も奇数となる。ナイトグラフの頂点集合は白マスと黒マスの二つの集合に分割されるが、この場合、両者のマス数は均等にならず、一方が他方より1マス多くなる<sup>8</sup>。二部グラフにハミルトン閉路が存在するためには、二つの頂点集合のサイズが等しいことが必要条件となる。したがって、この条件を満たさない奇数×奇数盤には、閉ナイトツアーは存在しない<sup>8</sup>。

なお、 $8 \times 8$  のチェス盤について、一部の資料では閉ツアーが存在しないと主張しているが<sup>2</sup>、これは Schwenk の定理 ( $8 \times 8$  盤は上記の例外条件のいずれにも該当しない) と矛盾する<sup>1</sup>。この矛盾は、ナイトの動きと閉ツアーの定義に関する論理的誤謬に起因する。閉ツアーは64マスを訪問する経路(63手)の後に、終点から始点へ戻る1手が可能であれば成立する。 $8 \times 8$  盤のナイトグラフでは、この条件を満たす経路が存在することが証明されているため、閉ツアーは存在すると結論付けられる。

#### 3.2 開ナイトツアーの存在条件

閉ツアーとは異なり、開ツアーの存在条件を完全に特性付ける Schwenk の定理のような簡潔な必要十分条件は、まだ知られていない<sup>8</sup>。しかし、多くの盤で開ツアーが存在することは分かっており、Cull と Conrad らの研究により、「より小さな次元が 5 以上の任意の長方形ボードには、開ナイトツアーが存在する」ことが証明されている<sup>4</sup>。

以下に、いくつかの代表的なボードサイズにおけるナイトツアーの存在条件をまとめる。

| ボードサイズ (m×n) | 閉ナイトツアーの存在 | 開ナイトツアーの存在 | Schwenk の定理の例外条件 |
|--------------|------------|------------|------------------|
| 3×3          | No         | No         | (I)              |
| 3×4          | No         | Yes        | (III)            |
| 4×4          | No         | No         | (II)             |
| 5×5          | No         | Yes        | (I)              |
| 3×6          | No         | Yes        | (III)            |
| 8×8          | Yes        | Yes        | なし               |

## 第 4 章 ナイトツアーの解法アルゴリズムと計算複雑性

ナイトツアーの解を見つけるためのアルゴリズムは複数存在するが、その効率性は手法によって大きく異なる。一般的なハミルトン路問題の計算複雑性と比較することで、ナイトツアー問題の特異性が明らかになる。

### 4.1 探索アルゴリズムの基本：バックトラッキング法

バックトラッキング法は、ナイトツアーを探索する最も基本的な手法の一つである<sup>13</sup>。この方法は、現在のマスから移動可能なすべてのマスに順に試し、行き止まりに達した時点で一歩前のマスに戻って別の経路を試すという、深さ優先探索（DFS）に基づいている<sup>13</sup>。

この手法の計算複雑性は、盤のサイズが大きくなるにつれて指数関数的に増加する。 $n \times n$  の盤の場合、時間計算量は  $O(8^{n^2})$  と見積もられる<sup>14</sup>。これは、各マスから最大 8 通りの移動が可能であり、すべてのマスを経路的に探索する必要があるためである。このため、 $8 \times 8$  のような大きな盤では、解を見つけるまでに非現実的な時間がかかるという欠点がある。

## 4.2 ヒューリスティック探索：Warnsdorff の規則

バックトラッキング法の非効率性を克服するため、より賢い探索手法が考案された。その代表例が、1823 年に H. C. von Warnsdorff によって提唱されたヒューリスティック（発見的手法）である<sup>9</sup>。Warnsdorff の規則は、「次に移動するマスとして、そこからさらに移動できる未訪問のマス（次数）が最も少ないものを選ぶ」という単純な貪欲（greedy）な戦略に基づいている<sup>9</sup>。

この規則が有効な理由は、探索の終盤で行き詰まる可能性を最小限に抑える戦略的な思考にある。チェス盤の角や端に近いマスは、移動可能な次のマスの数が少なく、一度訪れると行き詰まりに陥りやすい。Warnsdorff の規則は、これらの「行き止まりやすい」マスを早い段階で優先的に消費することで、多くの選択肢が残る中央部を可能な限り後回しにする。これにより、探索の終盤でもパスが維持されやすくなる。この「最も少ない選択肢から先に潰す」というアプローチは、探索空間を大幅に削減し、線形時間に近い計算量で解を見つけることを可能にしている<sup>9</sup>。Warnsdorff の規則の時間計算量は  $O(n^2 \log n)$

または  $O(n^2)$  であり、バックトラッキング法よりも格段に高速である<sup>14</sup>。

## 4.3 計算複雑性理論における位置づけ

ナイトツアー問題は、計算複雑性理論において興味深い位置を占めている。一般的なハ

ミルトン路問題は NP 完全問題として知られており、多項式時間で解くアルゴリズムは存在しないと考えられている<sup>10</sup>。

一方で、ナイトツアー問題は、一般的なハミルトン路問題の特殊なインスタンスでありながら、Warnsdorff の規則のような効率的なアルゴリズムによって多項式時間で解ける<sup>4</sup>。この事実は、NP 完全問題の難しさが、その基盤となるグラフの構造に大きく依存していることを示唆している。ナイトツアー問題は、チェス盤という非常に規則的で制約の多い「ナイトグラフ」の上で定義されているため、その特殊な構造が効率的な解法を可能にしているのである。したがって、ナイトツアー問題は、NP 完全問題と多項式時間で解ける問題の境界線を探るための優れたケーススタディとなる。

以下に、二つの主要な解法アルゴリズムの比較を示す。

| アルゴリズム         | 手法概要                             | 時間計算量                                  | 利点                  | 欠点                                             |
|----------------|----------------------------------|----------------------------------------|---------------------|------------------------------------------------|
| バックトラッキング法     | 深さ優先探索に基づく総当たりで、行き詰まったら戻る手法      | 指数関数的 ( $O(8n^2)$ )                    | 必ず解を見つける (存在する場合)   | 盤が大きくなると計算時間が非現実的になる                           |
| Warnsdorff の規則 | 次数が最も少ない未訪問マスを優先的に選ぶ貪欲なヒューリスティック | 多項式時間 ( $O(n^2)$ または $O(n^2 \log n)$ ) | 非常に効率的で、解を高速に見つけられる | ヒューリスティックのため、常に解が見つかるとは限らない (ただしナイトツアーでは高い成功率) |

## 第 5 章 結論と展望

本報告書では、ナイトツアー問題をグラフ理論の観点から深く掘り下げた。このパズルは、チェス盤という身近な題材を通じて、ハミルトン路問題という抽象的なグラフ理論の概念を具体化する優れたモデルであることが明らかになった。

ナイトグラフの二部性という構造的特性は、閉ナイトツアーの存在条件を決定づける

Schwenk の定理の証明において不可欠な役割を果たした。また、一般的なハミルトン路問題が NP 完全であるにもかかわらず、ナイトツアー問題が多項式時間で解けるという事実は、問題の難しさがグラフの構造に大きく依存していることを示唆する重要な知見である。Warnsdorff の規則は、この特殊な構造を巧みに利用した効率的なヒューリスティックの好例である。

現代においても、ナイトツアー問題は教育的価値を持ち続けている。グラフ理論、探索アルゴリズム、計算複雑性理論といった分野の入門に最適な教材であり、これらの概念を具体的かつ直感的に理解する手助けとなる。また、2次元のチェス盤に留まらず、3次元やそれ以上の高次元空間におけるナイトツアーの存在条件や解法といった、より複雑な問題への拡張も研究されており、数学的パズルとしての探求は今なお続いている<sup>6</sup>。ナイトツアーは、単なる遊びのパズルではなく、アルゴリズムと計算理論の基礎を探究するための豊かで奥深い題材であり続けているのである。

## 引用文献

1. 3D ナイト・ツアー | あのこね anoconne - note, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
<https://note.com/anoconne/n/nc0b6afb9b550>
2. 【騎士の旅路】ナイトがチェス盤を旅をするナイトツアー（騎士 ..., 8 月 15, 2025 にアクセス、  
<https://note.com/kendamarron/n/n8287d6e7acb1>
3. scholarworks.sjsu.edu, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
[https://scholarworks.sjsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=8383&context=etd\\_theses#:~:text=A%20knight's%20tour%20is%20a%20Hamiltonian%20path%20on%20the%20knight,use%20of%20the%20Turk%20ma chine.](https://scholarworks.sjsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=8383&context=etd_theses#:~:text=A%20knight's%20tour%20is%20a%20Hamiltonian%20path%20on%20the%20knight,use%20of%20the%20Turk%20ma chine.)
4. The Knight's Tour - SOUL OF MATHEMATICS, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
<https://soulofmathematics.com/index.php/the-knights-tour/>
5. ナイト・ツアー - Wikipedia, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8A%E3%82%A4%E3%83%88%E3%83%BB%E3%83%84%E3%82%A2%E3%83%BC>
6. Knight's Tours for Cubes and Boxes - UTK Math, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
<https://web.math.utk.edu/~yqing/knightstour.pdf>
7. ナイトツアー, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
[https://www.konkougakuen.net/ssh%20hp/2013Mat\\_22.pdf](https://www.konkougakuen.net/ssh%20hp/2013Mat_22.pdf)
8. ハミルトン閉路について, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
[https://orsj.org/wp-content/corsj/or61-12/or61\\_12\\_844.pdf](https://orsj.org/wp-content/corsj/or61-12/or61_12_844.pdf)
9. Knight's tour - Wikipedia, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Knight%27s\\_tour](https://en.wikipedia.org/wiki/Knight%27s_tour)
10. A SIMPLE ALGORITHM FOR KNIGHT'S TOURS Chess is a two player game played on a square board. Generally chess is played on a board, 8 月 15, 2025 にアクセス、

[https://sites.science.oregonstate.edu/math\\_reu/proceedings/REU\\_Proceedings/Proceedings2004/2004Ganzfried.pdf](https://sites.science.oregonstate.edu/math_reu/proceedings/REU_Proceedings/Proceedings2004/2004Ganzfried.pdf)

11. PuLP による数理最適化超入門 - NCT, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
[https://www.nct9.ne.jp/m\\_hiroi/light/pulp03.html](https://www.nct9.ne.jp/m_hiroi/light/pulp03.html)
12. ハミルトングラフと NP 完全 | 無流アクタ - note, 8 月 15, 2025 にアクセス、  
<https://note.com/rodz/n/n079ef002d288>
13. 【C 言語】ナイト巡回問題（ナイトツアー）のバックラック法での解き方 - だえうホームページ, 8 月 15, 2025 にアクセス、[https://daeudaeu.com/knight\\_tour/](https://daeudaeu.com/knight_tour/)
14. The Knight's Tour Problem (using Backtracking Algorithm) - FavTutor, 8 月 15, 2025 にアクセス、<https://favtutor.com/blogs/knight-tour-problem>
15. 2664. The Knight's Tour - In-Depth Explanation - AlgoMonster, 8 月 15, 2025 にアクセス、<https://algo.monster/liteproblems/2664>
16.  $n$  次元におけるチェスのナイトによるハミルトン路問題 - 玉川学園：SSH, 8 月 15, 2025 にアクセス、<http://science.tamagawa.ed.jp/event-iyoho26/140806.07n-DimOpenKnight'sTour.J.poster.pdf>